Ejercicios Relatividad General. Capítulo 62

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

February 29, 2020

Sea la métrica de anti-de Sitter definida como

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{1+\frac{r^2}{L^2}}\,\mathrm{d}r + r^2\,\mathrm{d}\theta + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi$$

1 Calcular el tensor de Ricci y comprobar que es solución de las ecuaciones de Einstein para $\Lambda = -\frac{3}{L^2}$

Voy a empezar escribiendo aquí simplemente los resultados de los cálculos:

1a) Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel que no son cero son los siguientes:

$$\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{r}{r^2+L^2},$$

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{r(L^2+r^2)}{L^4}, \qquad \Gamma^r_{rr} = -\frac{r}{r^2+L^2}, \qquad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r - \frac{r^3}{L^2}, \qquad \Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{r(L^2+r^2)\sin^2\theta}{L^2}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\frac{\sin(2\theta)}{2},$$

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta$$

1b) Tensor de Riemann

Las componentes del tensor de Riemann distintas de cero son

$$R^t{}_{rrt} = -R^t{}_{rtr} = \frac{1}{r^2+L^2}, \qquad R^t{}_{\theta\theta t} = -R^t{}_{\theta t\theta} = \frac{r^2}{L^2}, \qquad R^t{}_{\phi\phi t} = -R^t{}_{\phi t\phi} = \frac{r^2\sin^2\theta}{L^2},$$

$$R^r{}_{trt} = -R^r{}_{ttr} = \frac{L^2+r^2}{L^4}, \qquad R^r{}_{\theta\theta r} = -R^r{}_{\theta r\theta} = \frac{r^2}{L^2}, \qquad R^r{}_{\phi\phi r} = -R^r{}_{\phi r\phi} = \frac{r^2\sin^2\theta}{L^2},$$

$$R^\theta{}_{t\theta t} = -R^\theta{}_{tt\theta} = \frac{L^2+r^2}{L^4}, \qquad R^\theta{}_{rr\theta} = -R^\theta{}_{r\theta r} = \frac{1}{L^2+r^2}, \qquad R^\theta{}_{\phi\phi\theta} = -R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = \frac{r^2\sin^2\theta}{L^2},$$

$$R^\phi{}_{t\phi t} = -R^\phi{}_{tt\phi} = \frac{L^2+r^2}{L^4}, \qquad R^\phi{}_{rr\phi} = -R^\phi{}_{r\phi r} = \frac{1}{L^2+r^2}, \qquad R^\phi{}_{\theta\theta\phi} = -R^\phi{}_{\theta\phi\theta} = \frac{r^2}{L^2}$$

1c) Tensor de Ricci

El tensor de Ricci viene dado por:

$$R_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \frac{3(L^2+r^2)}{L^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{L^2+r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3r^2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3r^2\sin^2(\theta)}{L^2} \end{bmatrix}$$

Con

$$R = -\frac{12}{L^2}$$

Con esto podemos calcular que

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha_\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{3L^2+3r^2}{L^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{L^2+r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3r^2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3r^2\sin^2(\theta)}{L^2} \end{bmatrix} = \frac{3}{L^2}\begin{bmatrix} -\frac{L^2+r^2}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\frac{r^2}{L^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha_\beta} = \frac{3}{L^2}g_{\alpha\beta} \tag{1}$$

Y la ecuación

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha_\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0 \tag{2}$$

Se cumple si $\Lambda = -\frac{3}{L^2}$

2 Código para Python

Los cálculos anteriores los he hecho con `Python` en lugar de con `MAXIMA`, el codigo es el siguiente:

```python
import gravipy.tensorial as gpy #Importamos GraviPy; version 0.2.0
from sympy import sin, simplify

#Definimos las 5 variables que necesitamos;
t, r, q, p, L = gpy.symbols('t, r, \\theta, \phi, L')
Todo = gpy.All

#Definimos nuestras coordenadas:
x = gpy.Coordinates('x', [t,r,q,p])

#Definimos la metrica de anti-de Sitter:
Metrica = gpy.diag(-(1+r**2/L**2), 1/(1+r**2/L**2), r**2, r**2*sin(q)**2) #Con esto definimos una matriz 4x4.
#Ahora asignamos la matriz anterior como la metrica de las coordenadas definidas antes.
g = gpy.MetricTensor('g', x, Metrica)

#Calculamos todas las cantidades que necesitamos:
Chr_symb = gpy.Christoffel('Christoffel', g)
Rmnn = gpy.Riemann('Riemann', g)
Ricci = gpy.Ricci('Ricci', g)
R = Ricci.scalar
Einstein = gpy.Einstein('E', Ricci) #El tensor de Einstein se define como R_{\alpha\beta} - R/2 g_{\alpha\beta}

Ricci(Todo, Todo) #Esto nos muestra todas las componentes del tensor de Ricci
```